

## 三角関数の恒等式

大島利雄 (東京大学大学院数理科学研究科)

2008年1月13日

以下の三角関数の恒等式について、自然な/面白い証明は？

$$\sum_{k=1}^n \frac{\prod_{\nu \in \{1, \dots, n\}} \sin(x_k - y_\nu)}{\prod_{\nu \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}} \sin(x_k - x_\nu)} = \sin\left(\sum_{\nu=1}^n x_\nu - \sum_{\nu=1}^n y_\nu\right) \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n \prod_{\nu \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}} \frac{\sin(y_j - x_\nu)}{\sin(x_k - x_\nu)} \prod_{\nu \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}} \frac{\sin(x_k - y_\nu)}{\sin(y_j - y_\nu)} = 1 \quad (j = 1, \dots, n) \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n \sin(x_k + s) \cdot \sin(x_k + t) \cdot \prod_{\nu \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}} \frac{\sin(x_k + x_\nu + 2u)}{\sin(x_k - x_\nu)} \quad (3)$$
$$= \begin{cases} \sin\left(nu + \sum_{\nu=1}^n x_\nu\right) \cdot \sin\left(s + t + (n-2)u + \sum_{\nu=1}^n x_\nu\right) & \text{if } n = 2m \\ \sin\left(s + (n-1)u + \sum_{\nu=1}^n x_\nu\right) \cdot \sin\left(t + (n-1)u + \sum_{\nu=1}^n x_\nu\right) & \text{if } n = 2m + 1 \end{cases}$$

注意. i) これらの等式は、微分方程式の理論を使って証明できるが、(1) については複素関数論による別の証明が2種類得られている。

ii) 等式の面白い解釈があるとうれしい。

iii) 楕円関数への何らかの拡張はあるか？