# 正則パラメータの完備化とそのアルゴリズム
# A completion of holomorphic parameters and its algorithm


大島利雄

Toshio Oshima

城西大学 理学部

Faculty of Science, Josai University


## 1 いくつかの例

ベクトル空間を生成する有限個のベクトルや関数などがパラメータに正則にまたは有理的に依存しているとき，パラメータの特異点（例えば一時独立性が崩れる点，あるいは，パラメータが極を持つ点）で解析したい，という状況は多くある．

たとえば $t \in \mathbb{C}$ を正則（または有理的）パラメータとしていくつかの例を挙げてみよう．

**例 1**. $$\mathcal{A}_t : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \qquad \text{（線形変換）}$$
は $t$ を正則パラメータにもつとする（すなわち，$\mathbb{C}^n$ の基底を定めて $\mathcal{A}_t$ を行列表示すると，その成分は $t$ の正則関数となる）．さらに，$\mathcal{A}_t$ の固有値 $\lambda_\nu(t)$（$\nu = 1, \dots, n$）が $t$ に正則に依存していて，$\lambda_\nu(t) \neq \lambda_{\nu'}(t) \quad (t \neq 0,\ 1 \leq \nu < \nu' \leq n)$ であって，固有値 $\lambda_\nu(t)$ に対応する固有ベクトル $u_\nu(t)$ が与えられていたとする（$u_\nu(t)$ は $t = 0$ において高々極を許すが，他の点では正則）．

このとき，$t$ に正則に依存する $\mathbb{C}^n$ の基底 $\{\bar{u}_\nu(t) \mid \nu = 1, \dots, n\}$ を構成して，$\mathcal{A}_t$ の $t = 0$ の近くでの様子を解析せよ！（たとえば，$\mathcal{A}_0$ の Jordan 標準形は？）

**例 1.1**. $n = 2$ で

$$\bigl(\lambda_1(t), u_1(t)\bigr) = \bigl(1 + t^2, \begin{pmatrix} 1+t \\ 1 \end{pmatrix}\bigr),$$
$$\bigl(\lambda_2(t), u_2(t)\bigr) = \bigl(1 - t^2, \begin{pmatrix} 1+Ct \\ 1-t \end{pmatrix}\bigr)$$

であったとする（$C$ はある実数）．

$$u_3(t) := \frac{1}{1-t} u_2(t) - u_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{Ct+t^2}{1-t} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$
\bar{u}_1(t) := u_1(t) = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1 \end{pmatrix},
$$

$$
\bar{u}_2(t) := \begin{cases} \frac{1}{t} u_3(t) = \begin{pmatrix} \frac{C+t}{1-t} \\ 0 \end{pmatrix} & (C \neq 0), \\ \frac{1}{t^2} u_3(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-t} \\ 0 \end{pmatrix} & (C = 0) \end{cases}
$$

とおくと

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_t u_3(t) &= (1+t)u_2(t) - (1+t^2)u_1(t) \\
&= (1+t)(1-t)\bigl(u_3(t) + u_1(t)\bigr) - (1+t^2)u_1(t) \\
&= (1-t^2)u_3(t) - 2t^2 u_1(t)
\end{aligned}
$$

となるので

$$
\mathcal{A}_t \bar{u}_2(t) = \begin{cases} (1-t^2)\bar{u}_2(t) - 2tu_1(t) & (C \neq 0), \\ (1-t^2)\bar{u}_2(t) - 2u_1(t) & (C = 0). \end{cases}
$$

ここで $\bigl(\mathcal{A}_t \bar{u}_1(t), \mathcal{A}_t \bar{u}_2(t)\bigr) = \bigl(\bar{u}_1(t), \bar{u}_2(t)\bigr) A_t$ とおくと

$$
A_t = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1+t^2 & -2t \\ 0 & 1-t^2 \end{pmatrix} & (C \neq 0), \\ \begin{pmatrix} 1+t^2 & -2 \\ 0 & 1-t^2 \end{pmatrix} & (C = 0) \end{cases}
$$

となる．よって $A_0$ は，$C \neq 0$ のときのみ対角化可能となる．

このとき $\{\bar{u}_1(t), \bar{u}_2(t)\}$ は $GL(2, \mathcal{O}_o)$ の変換を除いて一意に定まる（なお．$\mathcal{O}_0$ は原点で正則な関数の環）．

**例 2**. $\mathcal{M}_t : P_j(t, x, \partial_x)u = 0 \quad (j = 1, \dots, m)$ (線形微分方程式系)
において $t \in \mathbb{C}$ は正則パラメータであるとする．一般の $t$ においては，$u_\nu(t, x)$ という $\mathcal{M}_t$ の解が与えられていて ($\nu = 1, \dots, N$)，それらは一般の $t$ で一次独立とする．さらに $u_\nu(t, x)$ は $t$ に正則，あるいは有理的に依存しているとする．

このとき，$\mathcal{M}_t$ の解 $\bar{u}_\nu(t, x)$ で，$t$ を正則パラメータに持ち，さらに $\forall t$ に対して $\dim \sum \mathbb{C}\bar{u}_\nu(t, x) = N$ となるものを構成せよ！

**例 3**. $W[x]$ : $(x_1, \dots, x_n)$ の Weyl 代数 （または $W(x) = \mathbb{C}(x) \underset{\mathbb{C}[x]}{\otimes} W[x]$ や $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$）
$J_t$ : $W[x]^N$ の左 $W[x]$-部分加群（$t$ について正則に依存）

$\bar{J}_t := \bigcup_{n=0}^{\infty} \overline{(W[x]^{(m)})^N \cap J_t}$ とおいたとき，$(W[x]^{(m)})^N \cap \bar{J}_t = \overline{(W[x]^{(m)})^N \cap J_t}$ ならば $\bar{J}_t$ を $J_t$ の（よい）正則完備化と呼ぼう．ここで，$^{(m)}$ は階数による filtration.

実際には，正則に依った関数のベクトル空間の満たす方程式が generic なパラメータのときに分かっている場合などに重要（**4.** における例などはその一つ）.

**多変数のパラメータ** $t = (t_1, \ldots, t_m)$ の場合

**例 4**. $\mathcal{M}_\lambda$ : $p_j(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m})u = p_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)u \qquad (j = 1, \ldots, m)$

$p_j(x) := \sum_{1 \le \nu_1 < \cdots < \nu_j \le m} x_{\nu_1} \cdots x_{\nu_m} \qquad (j = 1, \ldots, m)$

この方程式（複素パラメータ $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ を持つ）の解は

$u_\sigma(\lambda, x) := \exp\langle \sigma\lambda, x\rangle \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_m : m$ 次対称群) : 独立解 $\Leftarrow (\sigma\lambda = \lambda \Rightarrow \sigma = \mathrm{id})$

これらの関数の完備化 $\bar{u}_\sigma(\lambda, x)$ として，以下の条件を満たすものが定数倍を除いて一意に存在する．

1. $\bar{u}_\sigma(\lambda, x)$ は $\forall(\lambda, x) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ に対して正則
2. $\bar{u}_\sigma(x) = \sum_{\sigma' \le \sigma} c^\sigma_{\sigma'}(\lambda) \exp\langle \sigma'\lambda, x\rangle$
   ただし，$c^\sigma_{\sigma'}(\lambda)$ は $\lambda$ の有理関数で， $c^\sigma_{\sigma'}(C\lambda) = C^{-|\sigma|} c^\sigma_{\sigma'}(\lambda) \qquad (\forall C \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$
   $|\sigma|$ は，$\sigma$ の転倒数, さらに $\sigma \ge \sigma'$ の関係は，$\sigma = \sigma'$ または転倒数の大小（あるいは，Bruhat order の大小としても結果は同じ）.

このとき, 以下が成立するので**正則完備化**である.

$$\dim \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \mathbb{C}\bar{u}_\sigma(\lambda, x) = m! \quad (\forall \lambda \in \mathbb{C}).$$

特に $w^*$ を転倒数が最大の $\mathfrak{S}_m$ の元とすると

$$\begin{aligned} \bar{u}_{w^*}(\lambda, x) &= \frac{\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma} \exp\langle \sigma\lambda, x\rangle}{\prod_{1 \le i < j \le m}(\lambda_i - \lambda_j)} \\ &= \prod_{1 \le i < j \le m} (x_i - x_j) \qquad (\text{if } \lambda = 0) \end{aligned}$$

$\{u_\sigma(0, x) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_m\}$ は，$\mathfrak{S}_m$ に対する**調和多項式**の空間の基底で

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \mathbb{C}\bar{u}_\sigma(0, x) = \mathbb{C}[\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \tfrac{\partial}{\partial x_m}] \prod_{1 \le i < j \le m} (x_i - x_j).$$

この例について，より詳しくは [2, §1] を参照して下さい．また，Weyl の指標公式や次元公式にも関係しています.

$m=2$ の場合は

$$
\begin{aligned}
\bar{u}_1(\lambda,x) &= \exp(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2),\\
\bar{u}_1(0,x) &= 1,\\
\bar{u}_2(\lambda,x) &= \frac{\exp(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)-\exp(\lambda_2 x_1+\lambda_1 x_2)}{\lambda_1-\lambda_2}\\
&= \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda_2 x_1+\lambda_1 x_2)^n}{n!}}{\lambda_1-\lambda_2}\\
&\qquad (\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)-(\lambda_2 x_1+\lambda_1 x_2)=(\lambda_1-\lambda_2)(x_1-x_2)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x_1-x_2)\sum_{\nu=0}^{n-1}(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)^{\nu}(\lambda_2 x_1+\lambda_1 x_2)^{n-\nu-1}}{n!}\\
&= (x_1-x_2)\sum_{i,\,j=0}^{\infty}\frac{(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)^i(\lambda_2 x_1+\lambda_1 x_2)^j}{(i+j+1)!},\\
u_2(0,x) &= x_1-x_2.
\end{aligned}
$$

## 2 命題

**命題 1** [1, Proposition 2.21]. $u_j(t,x)$ $(1\le j\le m)$ : $\mathcal{D}'(M)$ に値をとる $t\in D_r\setminus\{0\}$ 上の一次独立な正則関数で，$t=0$ は高々極とする（ただし，$\mathcal{D}'(M)$ は多様体 $M$ 上のシュワルツ超関数の空間で $D_r:=\{t\in\mathbb{C}\mid |t|<r\}$）.
$\Rightarrow$ $\exists c_{i,j}(t)\in\mathbb{C}(t)$ such that $\bar{u}_i(t,x):=\sum_j c_{i,j}(t)u_j(t,x)$ は $t$ について正則で $t=0$ でも一次独立（$i=1,\dots,m$）.

このとき，$\{\bar{u}_1(t,x),\dots,\bar{u}_m(t,x)\}$ を $\{u_1(t,x),\dots,u_m(t,x)\}$ の**正則完備化**と呼ぼう.

**注意 1**. 1) 上の $\{\bar{u}_j(t,x)\}$ は本質的に一意（$GL(m,\mathcal{O}_0)$ で移り合う．特に $\bar{V}_0:=\sum_j\mathbb{C}\bar{u}_j(0,x)$ は決まる）

2) $u_j(t,x)\in\mathbb{C}(t,x)$ のときも同様

**命題 2** [5, Lemma 6.3]. 命題 1 と同じ仮定，ただし有理的パラメータは多変数 $t=(t_1,\dots,t_k)$, $k>1$ で $u_j(t,x)$ $(1\le j\le m)$ は $t$ の generic point で一次独立.
0 を通る正則曲線 $\gamma(s)=(t_1(s),\dots,t_k(s))$ を用いて $u_j(\gamma(s),x)$ に対して前命題によって $t=0$ への解析接続で得られる基底を $\bar{u}_i^{\gamma}$，$\bar{V}_0:=\sum_{\gamma,\,i}\mathbb{C}\bar{u}_i^{\gamma}$ とおく．このとき以下のいずれかが成立.

1) $\dim\bar{V}_0>m$

2) $\dim \bar{V}_0 = m$ かつ前命題と同様のことが成立

特に $t$ が正則パラメータで，$\{1$ 次独立でない $t\}$ の余次元 $> 1 \Rightarrow$ 上の 1) が成立．より詳しくは，$\dim \bar{V}_0 \geq \{1$ 次独立でない $t\}$ の余次元 $-1+m$.

**命題 1 の証明の概略.**

$\underline{c_{i,j}(t)\text{ の構成}}$：

- $u_j(t,x) \leftarrow t^N u_j(t,x)$ により，$t$ は正則パラメータとしてよい
- $m=1$ のとき．$u_j(0,x)=0 \Rightarrow u_j \leftarrow \frac{u_j}{t}$　(有限回繰り返して終了)
- $u_1(t,x),\ldots,u_k(t,x)$：$t=0$ で一時独立とする

  $\exists C_\nu \in \mathbb{C}$ s.t. $u_{k+1}(0,x) = \sum_{1\leq\nu\leq k} C_\nu u_\nu(0,x)$

  $\Rightarrow u_{k+1} \leftarrow \frac{1}{t}(u_{k+1} - \sum_{1\leq\nu\leq k} C_\nu u_\nu)$　　(有限回繰り返して終了)

$\underline{\text{一意性}}$：$\{\bar{u}_j(t,x)\}$, $\{\bar{u}'_j(t,x)\}$：共に完備化

$\bar{u}'_j(t,x) = \sum_\nu a_{i,\nu}(t) u_\nu(t,x) \Rightarrow a_{i,\nu}(t)$ は $D_r$ で正則

$\big(a_{i,j}(t)\big)$ は $D_r$ で可逆で，逆行列の成分も $D_r$ で正則

**注意 2**. 上の構成法では，$\big(c_{i,j}(t)\big)$ は下三角で，そのとき（対角成分を除いて）$c_{i,j}(t)$ は一意（$\big(u_1(t,x),\ldots,u_m(t,x)\big)$ の順序のみに依る）.

例 4 では $\sigma$ の長さ（or Bruhat order）に両立する順序を用いた.

**例 5. 複数パラメータ**: $(s,t)$

$f_1 = s^4x + s^2t^3y + s^3t^2z + t^6w$ : $\bar{V}_0 = \langle x,y,w\rangle$

$f_2 = s^4x + s^2t^3x + s^3t^2z + t^6x$ : $\bar{V}_0 = \langle x,z\rangle$

$f_3 = s^4x + s^2t^3y + s^3t^2z + t^7w$ : $\bar{V}_0 = \langle x,y,z,w\rangle$

# 3 アルゴリズム

- $u_j(t,x) \in \mathbb{C}[t,x_1,\ldots,x_n]$ $\Rightarrow$ 前命題の証明通り
- $u_j(t,x) \in \mathbb{C}(t,x_1,\ldots,x_n)$ $\Rightarrow$ $0 \neq p \in \mathbb{C}[t,x_1,\ldots,x_n]$ を掛けて上に帰着

  これを Risa/Asir に実装した.
- $u_j(t,x)$：べき級数のとき $\Rightarrow$ べきが十分高い有限項で切って多項式にすると上に帰着される．$c_{i,j}(t)$ は切り方に依らない

**注意 3**. $u_j(t,x)$ が有理式などの場合は，数式処理 `Risa/Asir` 上で関数 `paracmpl()` として実現した（[7]）．この実現で，命題 1 の証明の概略における $\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_k$ は，単項式についての辞書式順序を定め，それに関して Gröbner 基底のように標準的に定める.

`paracmpl(`$l$`,`$t$`|lim=1,low=1,para=[`$v_1,v_2,\ldots$`])`
:: 有理的に $t$ に依存したリスト $l$ の成分（たとえば有理式）で張られる空間の正則完備化

$l$ の成分が有理式 $f_1(t,x),\ldots,f_m(t,x)$ のとき（$x$ は多変数でよい），generic に $t=t_0$ と特殊化した $f_1(t_0,x),\ldots,f_m(t_0,x)$ の一次独立な個数を $\bar{m}$ とする．1 変数 $t$ の有理式 $g_{i,j}(t)$ を適当に取って

$$h_j(t,x)=\sum_{i=1}^{m}f_i(t,x)g_{i,j}(t)$$

とおくと，0 でない $h_j(t,x)$ の個数は $\bar{m}$ で，しかも $h_j(t,x)$ は $t=0$ で極を持たず，$h_1(0,x),\ldots,h_m(0,x)$ の一次独立な個数は $\bar{m}$ とできる

`paracmpl([`$f_1(t,x),\ldots,f_m(t,x)$`],`$t$`)` は，この `[[`$h_1(t,x),\ldots,h_m(t,x)$`],(`$g_{i,j}(t)$`)]` を返す.

- $l$ はベクトルでもよいが，リストで返される.
- $[h_1(t,x),\ldots,h_m(t,x)]$ は, $t$ の有理式を成分とする可逆行列 $A=\bigl(a_{i,j}(t)\bigr)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le m}}$ で，$A$ と $A^{-1}$ の各成分が $t=0$ に極を持たないものによる変換を除いて一意となる.
- 返される $G=\bigl(g_{i,j}(t)\bigr)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le m}}$ は上三角行列となる.
- `low=1` を指定すると, $x$ の次数が小さい項に注目する（cf. 注意 4).
- `lim=1` を指定すると `[`$h_1(0,x),\ldots,h_m(0,x)$`]` を返す.
- $f_i(t,x)$ は有理式でなく，有理式を成分とするリストやベクトルでもよい.
- `para=[`$v_1,\ldots,v_k$`]` を指定すると，数係数でなくて不定元 $v_1,\ldots,v_k$ 係数の有理関数体係数の有理式とみなす.
- $\bar{m}=m$ のとき，$f_i(t,x)$ が有理式でなくて $\exp\bigl((1+t)x\bigr)$ のような式の場合は，適当な次数まで Taylor 展開した式で $f_i(t,x)$（の分母分子）を置き換え，`low=1` を指定して求めた $G$ で変換すればよい.

実行例は

```
[0] os_md.paracmpl([1/(x-1),1/((t+1)*x-1)],t);
[[(1)/(x-1),(1)/((t+1)*x^2+(-t-2)*x+1)],[ 1 (1)/(t) ]
[ 0 (-t-1)/(t) ]]
[1] os_md.paracmpl([1/(1-x),1/(1-(t+1)*x)],t|lim=1);
[ (1)/(x-1) (1)/(x^2-2*x+1) ]
[2] os_md.paracmpl([1/(x-1),1/((t+1)*x-1)],t|low=1);
```

```
[[(-1)/(x-1),(x)/((t+1)*x^2+(-t-2)*x+1)],[ -1 (1)/(t) ]
[ 0 (-1)/(t) ]]
[3] os_md.paracmpl([1/(x-1),1/((t+1)*x-1)],t|low=1,lim=1);
[ (-1)/(x-1) (x)/(x^2-2*x+1) ]
[4] os_md.paracmpl([[1/t,1,1],[1+t,0,-t]],t);
[[[1,t,t],[0,t+1,t+2]],[ t t+1 ]
[ 0 (-1)/(t) ]]
[5] os_md.paracmpl([[1/t,1,1],[1+t,0,-t]],t|lim=1);
[[1,0,0],[0,1,2]]
```

上の [0]〜[5] は以下を示している.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x-1}, \frac{1}{(t+1)x^2+(-t-2)x+1}\right) &= \left(\frac{1}{x-1}, \frac{1}{(t+1)x-1}\right)\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{t}\\ 0 & \frac{-t-1}{t}\end{pmatrix}\\ &= \left(\frac{1}{x-1}, \frac{1}{(x-1)^2}\right) \qquad \text{if}\ \ t=0,\\ \left(\frac{1}{1-x}, \frac{x}{(t+1)x^2+(-t-2)x+1}\right) &= \left(\frac{1}{x-1}, \frac{1}{(t+1)x-1}\right)\begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{t}\\ 0 & -\frac{1}{t}\end{pmatrix}\\ &= \left(\frac{1}{1-x}, \frac{x}{(1-x)^2}\right) \qquad \text{if}\ \ t=0,\\ \left(\begin{pmatrix}1\\ t\\ t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ t+1\\ t+2\end{pmatrix}\right) &= \left(\begin{pmatrix}\frac{1}{t}\\ 1\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}t+1\\ 0\\ t\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}t & t+1\\ 0 & -\frac{1}{t}\end{pmatrix}\\ &= \left(\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\end{pmatrix}\right) \qquad \text{if}\ t=0.\end{aligned}$$

ここで以下に注意

$$\left(\frac{1}{1-x}, \frac{x}{(1-x)^2}\right) = \left(\frac{1}{x-1}, \frac{1}{(x-1)^2}\right)\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

なお，最初の 2 例は $\{u_1(t,x)=\frac{1}{x-1},\ u_2(t,x)=\frac{1}{(t+1)x-1}\}$ の $t=0$ での正則完備化で，最後の例は 2 つの 3 次元ベクトル $\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{t}\\ 1\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ t+1\\ t+2\end{pmatrix}\right\}$ の正則完備化を与えている.

微分方程式

$$\bigl((t+1)x^2-(t+2)x+1\bigr)\frac{d^2u}{dx^2}+2\bigl(2(t+1)x-t-2\bigr)\frac{du}{dx}+2(t+1)u=0$$

の解空間は $t \neq 0$ のとき $\{\frac{C_1}{x-1} + \frac{C_2}{(t+1)x-1} \mid C_1, C_2 \in \mathbb{C}\}$ である．このことから $t=0$ のときの解空間は $\{\frac{C_1}{x-1} + \frac{C_2}{(x-1)^2} \mid C_1, C_2 \in \mathbb{C}\}$ となることが分かる．より一般に，任意の $t$ で解空間は $\{\frac{C_1}{x-1} + \frac{C_2 x}{(t+1)^2x^2-(t+2)x+1} \mid C_1, C_2 \in \mathbb{C}\}$ で与えられる．

$x=0$ の近くで考えるときは，`low=1` を指定する方が便利なことが多い．

**複数パラメータのとき**，命題 2 における 1), 2) のいずれになるかを判定し，さらに 2) の場合に $c_{i,j}(t)$ を求めるには以下のようにすればよい．

- $u_{i,j}(t,x)$ は有理式とする．
- 適当な $p(t,x)$ を掛けて $u_{i,j}(t,x)$ は多項式としてよい．
- $\dim \sum_{j=1}^{m} \mathbb{C}u_j(t_0,x) = m$ となる $t_0$ を選び，$t = st_0$ とおいて，1 つのパラメータ $s$ に対する結果に対応する完備化 $\bar{u}'_1, \ldots, \bar{u}'_m$ を求める．
- 注意 3 における基底に対応する $m$ 個の単項式 $x^{\alpha_j}$ に対し，$\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m$ は $\bar{u}_i$ の $x^{\alpha_j}$ の係数が $\delta_{i,j}$ となるように $c_{i,j}(t)$ を定めて決める．このとき $c_{i,j}(t)$ が $t=0$ に特異点を持てば 1) で，そうでなければ 2) で $c_{i,j}(t)$ が求めるものとなる．

## 4　問題例

**問題 1**．命題 2 で 1 ) となる場合に，$\bar{V}_0$ を求めるアルゴリズムは（$u_j(t,x)$ が多項式の場合でも問題）？

以下の例 6〜9 は一連の例（対称群 $\to$ 正方行列 $\to$Lie 環，cf. [6]）．

**例 6**. $n = n_1 + \cdots + n_k$, $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k$

$P_t := (\overbrace{t_1, \ldots, t_1}^{n_1}, \overbrace{t_2, \ldots, t_2}^{n_2}, \ldots, \overbrace{t_k, \ldots, t_k}^{n_k}) \in \mathbb{C}^n$

$V_t := \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \{\sigma P_t\} \subset \mathbb{C}^n, \qquad \#V_t = \frac{n!}{n_1! \cdots n_k!}$

$I = \{f \in \mathbb{C}[t,x]; f(t,x)|_{V_t} = 0\}$ のよい生成元を求めよ．

i)　$p_j(x) - p_j(P_t)$,　$p_j(x)$ : 基本対称式 $(j = 1, \ldots, n)$

ii)　$(x_{i_1} - t_j) \cdots (x_{i_{n-n_j+1}} - t_j)$　$(1 \leq i_1 < \cdots < i_{n-n_j+1} \leq n)$

iii) $(x_i - t_1) \cdots (x_i - t_k)$　$(1 \leq i \leq n)$

生成元 : i) + ii)　or　i) + iii) for generic $t$, 両者の関係と完備化？

たとえば，i) + iii) において，単に $t=0$ とおくと，それは $n_k$ のみに依存しないが，完備化は $(n_1, \ldots, n_k)$ の違いが区別できる．

**例 7**. $V_t := \bigcup_{g\in GL(n,\mathbb{C})} g\left\{\begin{pmatrix} t_1 I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & t_k I_{n_k}\end{pmatrix} g^{-1}\right\} \subset M(n,\mathbb{C})$
ただし，$t=(t_1,\ldots,t_n)$ は例 5 の形.

同様の問題：行列の共役類の閉包の定義イデアル $I$（のよい生成系）は？

なお，$I$ は $\mathbb{C}[t,x]$, $x=(x_{i,j})_{1\le i\le j,\ 1\le j\le n}$ のイデアルで $x_{i,j}$ は $n$ 次正方行列の $(i,j)$ 成分に対応する不定元.

$I$ の生成元として，具体的には，例 6 の i) + ii) を一般化した行列式因子に対応したもの，i) + iii) を一般化した最小多項式に対応するもの，などがある.

またそれらの完備化は？

べき零行列の共役類 $\leftrightarrow$ $n$ の分割（ヤング図式の転置で上と対応）

**例 8**. リー環への量子化（例 7 も含め，詳しくは [3, 5]）
$\mathfrak{gl}_n^\epsilon = \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} \mathbb{C}X_{i,j}$ : $[X_{i,j}, X_{k,\ell}] = \epsilon(\delta_{j,k}X_{i,\ell} - \delta_{\ell,i}X_{k,j})$
$U(\mathfrak{gl}_n^\epsilon)$ : $\mathfrak{gl}_n^\epsilon$ の普遍包絡環
　$\epsilon=1$ : リー環の普遍包絡環
　$\epsilon=0$ : 多項式環（例 6 に対応）
$I_t \Rightarrow I_t^\epsilon$ : $U(\mathfrak{gl}_n^\epsilon)$ の両側イデアル（$I_t$ の**量子化**）
$I_t^1$ : 一般スカラー型 Verma 加群の零化イデアル
この場合，[3] で正則完備化の基底を得ている.

**例 9**. 一般化（cf. [4, 5]）
$\mathfrak{S}_n \to$ Weyl 群
$\mathfrak{gl}_n \to$ 半単純リー環
最小多項式を拡張したものが具体的に構成できるが，その完備化は未だ不明確.

**問題 2**. イデアルに対称群（より一般に Weyl 群）や $GL(n,\mathbb{C})$（より一般に半単純リー群）が作用しているとする．その作用が見えるよい基底は？

群の作用で不変なイデアルについてのよい（Gröbner 的?）基底は？

# 5　終わりに

本研究は，JSPS 科学研究費 JP24224002，JP25187017, JP15K00944 の助成を受けたものです.

## 参考文献

[1] T. Oshima and J. Sekiguchi, Eigenspaces of invariant differential operators on an affine symmetric space, Invent. Math. **57** (1980), 1–81.

[2] T. Oshima, Asymptotic behavior of spherical functions on semisimple symmetric spaces, Advanced Studies in Pure Math. **14** (1988), 561–601.

[3] T. Oshima, A quantization of conjugacy classes of matrices, Advances in Math. **196** (2005), 124–146.

[4] T. Oshima and H. Oda, Minimal polynomials and annihilators of generalized Verma modules of the scalar type, Journal of Lie Theory **16** (2006), 155–219.

[5] T. Oshima, Annihilators of generalized Verma modules of the scalar type for classical Lie algebras, "Harmonic Analysis, Group Representations, Automorphic forms and Invariant Theory", in honor of Roger Howe, Lecture Notes Series **12** (2007), 277–319, National University of Singapore.

[6] T. Oshima and H. Oda, A quantization of linear algebra and its application to integral geometry, "Geometric Analysis and Integral Geometry", Contemporary Mathematics **598** (2013), 189–208.

[7] 大島利雄， `os_muldif.rr` および `os_muldif.pdf`, a library for computer algebra `Risa/Asir`, 2007–2017， `ftp://akagi.ms.u-tokyo.ac.jp/pub/math/muldif/`